DISEQUAZIONI IRRAZIONALI- esercizi svolti

1. Determinare le soluzioni della seguente disequazione irrazionale

$$\sqrt{2x+7} \leq x+1$$

La disequazione è del tipo: $\sqrt{A(x)} \leq B(x)$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \rightarrow & (garantisce\ l'esistenza\ della\ radice) \\ B(x) > 0 & \rightarrow & (La\ radice\ \grave{e}\ sempre\ positiva\ perci\grave{o}\ non \\ & & pu\grave{o}\ essere\ di\ una\ quantit\grave{a}\ negativa) \\ \left[\sqrt{A(x)}\,\right]^2 \leq [B(x)]^2 & \rightarrow & (si\ eleva\ al\ quadrato\ primo\ e\ secondo\ membro) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+7 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ \cancel{2x}+7 \leq x^2+\cancel{2x}+1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -\frac{7}{2} \\ x \geq -1 \\ x^2-6 \geq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -\frac{7}{2} \\ x \geq -1 \\ x \leq -\sqrt{6} \quad x \geq \sqrt{6} \end{cases}$$

La soluzione è: $S : x \geq \sqrt{6}$

2. Determinare le soluzioni della seguente disequazione irrazionale

$$x+1 < \sqrt{x-1}$$

$$\sqrt{x-1} > (x+1)$$

$$\sqrt{A(x)} > B(x)$$

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 > (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > -1 \\ x-1 > x^2+2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x+2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x > -1 \\ \emptyset \end{cases}$$

$$S : \emptyset$$

3. Determinare le soluzioni della seguente disequazione irrazionale

$$x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} > 0$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > -x$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ -x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -x > 0 \\ x^2 + 2x - 3 > x^2 \end{cases}$$

$(x + 3)\,(x - 1)$

$$\begin{cases} x \leq -3 \quad\quad x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ x > +\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$S_1 : x \geq 1 \quad S_2 : \emptyset \quad \rightarrow \quad S_{TOT} : x \geq 1$

4. Determinare le soluzioni della seguente disequazione irrazionale

$$\sqrt{\frac{x^2 - 1}{2 + x}} < \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{x^2 - 1}{2 + x} \geq 0 \rightarrow \textit{garantisce l'esistenza della prima radice} \\ (2) \quad x \geq 0 \quad\quad \rightarrow \textit{garantisce l'esistenza della seconda radice} \\ (3) \quad \dfrac{x^2 - 1}{2 + x} < x \end{cases}$$

$(1) \quad \dfrac{x^2 - 1}{2 + x} \geq 0$

$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \leq -1 \quad\quad x \geq 1 \\ x > -2 \end{cases}$

$S_1 : (-2;\ -1] \cup [1;\ +\infty)$

(3) $\dfrac{x^2-1}{2+x}<x$

$$\frac{x^2-1}{2+x}-x<0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2-1-2x-x^2}{2+x}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{-2x-1}{2+x}<0$$

$$\begin{cases}-2x-1>0 \\ \;\; 2+x>0\end{cases}; \begin{cases}x<-\dfrac{1}{2} \\ x>-2\end{cases}$$

$$S_3: (-\infty;\ -2) \cup \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)$$

$$\begin{cases}(-2;\ -1] \cup [1;\ +\infty) \\ [0;\ +\infty) \\ (-\infty;\ -2) \cup \left(-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)\end{cases}$$

$$S: x \geq 1$$